Министерство образования и науки
Российской Федерации
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова»

В.Г. Дудник

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебное пособие
для студентов направления 230100
«Информатика и вычислительная техника»

Рубцовск 2013

УДК 517.8

Дудник В.Г. Основы математического программирования: Учебное пособие для студентов направления 230100 «Информатика и вычислительная техника» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2013. – 49 с.

В основу методического пособия положены математические модели, методы, алгоритмы, возникающие в курсе “Методы оптимизации” у студентов направления 230100 «Информатика и вычислительная техника». Предназначено для практических занятий по дисциплине.

Рассмотрены и одобрены
на заседании НМС РИИ.
Протокол №1 от 20.02.13.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор ННИГУ Г.В. Демиденко

СОДЕРЖАНИЕ

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

а) Задача оптимального использования ресурсов.

На производстве используется m видов ресурсов,

b_j – количество j ресурса, j=1,…,m.

Выпускается n видов продукции,

a_{ij} – затраты ресурса j на производство единицы продукта i.

c_i – прибыль, получаемая от единицы i продукта, i=1,…,n.

Требуется составить план выпуска продукции, максимизирующий прибыль.

Математическая модель имеет вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j, \qquad j=1,\dots,m.$$

$x_i \ge 0$, где x_i – план выпуска продукции i.

б) Задача о рационе.

Рацион питания должен содержать n видов питательных веществ в количествах, не менее c_i, i=1,…,n. Эти вещества содержатся в m видах продуктов, a_{ij} – количество вещества i в единице продукта j,

b_j – стоимость единицы j продукта, j=1,…,m.

Требуется составить рацион, удовлетворяющий потребностям в питательных веществах при минимальной стоимости.

Математическая модель имеет вид:

$$L=\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \ge c_i, \qquad i=1,\dots,n.$$

$y_j \ge 0$, где y_j – количество продукта j в рационе, j=1,…,m.

в) Замкнутая транспортная задача.

У n поставщиков имеется однородный товар в количествах a_i, i=1,…,n. m потребителям этот товар необходим в количествах b_j, j=1,…,m.

c_{ij} – транспортные расходы на доставку единицы товара от поставщика i к потребителю j.

Требуется составить план перевозок, удовлетворяющий всех поставщиков и потребителей, имеющий минимальную стоимость перевозок.

Математическая модель для случая замкнутой задачи, когда совокупное предложение равно суммарному спросу,

$(\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j)$:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$, i=1,…,n. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$, j=1,…,m, $x_{ij} \geq 0$,

где x_{ij} – количество товара, перевозимого от поставщика i к потребителю j.

г) Задача об оптимальном назначении.

Имеется n видов работ и n претендентов на выполнение этих работ.

c_{ij} – затраты при назначении претендента i на работу j. j, i=1,…,n.

Причем всякий претендент может быть назначен только на одну работу и на всякую работу возможно назначение только одного из претендентов.

Требуется осуществить назначения с минимальными затратами.

Математическая модель:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{ i=1,…,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{ j=1,…,n}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если претендент } i \textit{ назначен на работу } j \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

д) Задача о раскрое.

На раскрой поступает однотипный материал. Требуется изготовить q различных изделий в количествах, пропорциональных b_1: b_2:…:b_q. Материал можно раскроить p способами. При раскрое способом i получим a_{ij} единиц изделия j из единицы материала, i=1,…, p; j=1,…,q.

Найти план раскроя, обеспечивающий максимальное число комплектов, если поступает a единиц однотипного материала.

Математическая модель:

$$Z = x \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_i = a$$

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij}x_i = b_j x, \text{ j=1,…,q}$$

x_i, x ≥ 0, i=1,…,p.

x – число комплектов изделий,

x_i – количество материала, раскраиваемого способом i.

Задачи. Построить математические модели.

1. НПЗ производит за месяц 1500 т.л алкилата, 1200 т.л крекинг-бензина, 1300 т.л изопентона. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1:1:1 и 3:1:2 получается бензин сорта А и Б соответственно. Стоимость 1 л бензина А равна 27р., бензина Б – 28,5р.

Определить месячный план производства бензина сорта А и Б, максимизирующий стоимость выпущенной продукции.

2. Рацион кормления коров на ферме состоит из сена, силоса, концентратов. Эти продукты содержат питательные вещества – белок, кальций, витамины:

		Белок(г/кг)	Кальций(г/кг)	Витамины(мг/кг)
1.	Сено	50	10	2
2.	Силос	70	6	3
3.	Концентраты	180	3	1

В расчете на одну корову суточные нормы потребления белка – не менее 2000 г, кальция – не менее 210 г, витаминов – ровно 87 мг. Составить самый дешевый рацион, если стоимость соответственно 1, 2 и 6 у.е.

3. В области имеются два цементных завода и три потребителя их продукции – ДСК.

За-вод	Производство цемента в сутки	Стоимость перевозки 1т цемента (у.е.)		
		ДСК1	ДСК2	ДСК3
1	40 т	10	15	25
2	60 т	20	30	30
	Потребности в цементе (т/сут.)	50	20	30

Составить план суточных перевозок цемента с минимальными транспортными расходами.

4. На участок поступают металлические прутья длиной 5 м. На выходе должны получиться прутья длиной 1,5; 2,4; 3,2 м в отношении 5:3:2. Определить план изготовления максимального числа комплектов.

5. Фирма объединяет три предприятия, каждое из которых производит три вида изделий:

	Производительность изделий (в у.е.)		
Предприятие	1	2	3
1	15	6	12
2	6	9	13
3	8	11	2

Учитывая необходимость специализации каждого предприятия только по одному изделию, распределить производство изделий по предприятиям так, чтобы суммарная производительность фирмы при этом распределении была максимальной.

2. ЗАДАЧИ ЛП И ЛП*

а) Графическое решение задачи ЛП (линейного программирования).

В общем виде задача ЛП:

Z=cx $\rightarrow$ max – целевая функция,

Ax <= b, X >= 0 – система ограничений.

Графическое решение основано на теореме о достижении экстремума.

ТЕОРЕМА:

Экстремум целевой функции задачи ЛП, если он существует, всегда является глобальным и достигается, в том числе, хотя бы в одной крайней точке области допустимых значений.

Получается следующий алгоритм.

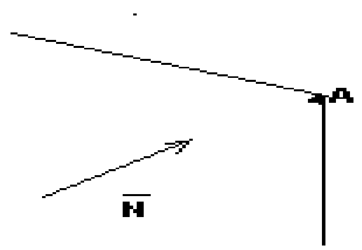
1 шаг. Строится многогранник, соответствующий системе ограничений.

2 шаг. Строится направляющий вектор (градиент) $\vec{N}\left(\frac{\partial Z}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial Z}{\partial x_n}\right)$.

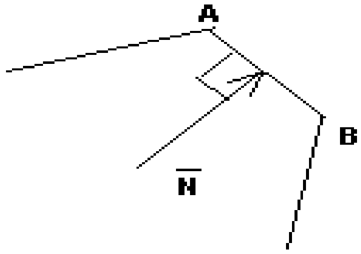
3 шаг. Проводится опорная гиперплоскость, проходящая через область допустимых значений (многогранник) и перпендикулярно $\vec{N}$. Перемещаем гиперплоскость в направлении $\vec{N}$. Заметим, что в любой точке этой гиперплоскости целевая функция принимает одинаковые значения. Градиент – направление быстрейшего возрастания функции. Остается найти крайнюю точку, в которой гиперплоскость покидает многогранник. Это и есть оптимальное решение.

Возможны случаи:

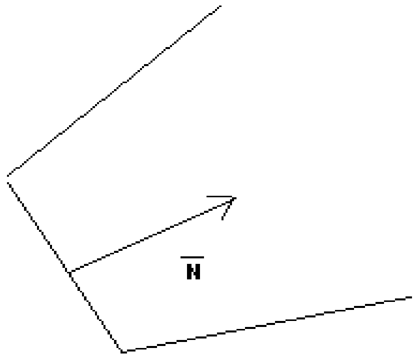
(1) А – оптимальная точка.



(2) Вся граница AB многогранника состоит из оптимальных точек.

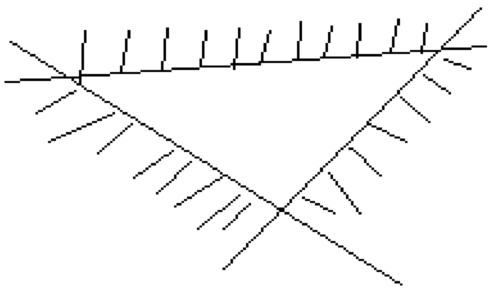


(3)



Многогранник не ограничен и $\vec{N}$ направлен в сторону его неограниченности. В этом случае на бесконечности много решений и $Z_{\max} = \infty$.

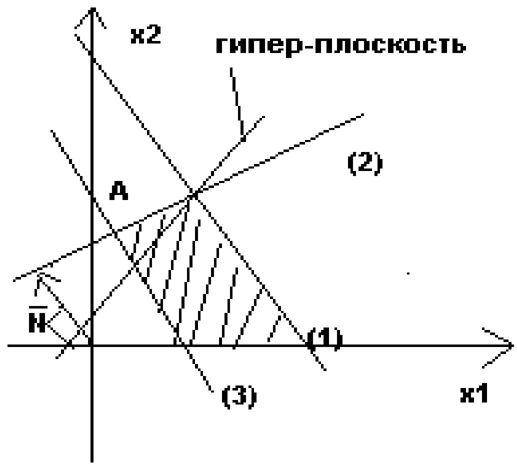
(4)



Многогранник пуст, решений нет.

Пример: $Z = -x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 + 4x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$



Удаляя опорную гиперплоскость в направлении $\vec{N}$ (-1,2), получим оптимальную точку А:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad \bar{x}_1 = \frac{4}{9}, \quad \bar{x}_2 = \frac{10}{9}$$

$$Z_{\max} = Z(\bar{x}_1, \quad \bar{x}_2) = \frac{16}{9}$$

б) Двойственность в линейном программировании.

Двойственной к задаче ЛП

(1) $Z \to \max$

$Ax \le b$, $x >= 0$

называется задача ЛП*

(2) $L = by \to \min$

$A^T y \ge c$, $y \ge 0$.

Связь между задачами ЛП и ЛП* устанавливают теоремы двойственности.

ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ:

Если одна из задач (1),(2) имеет оптимальное решение x(y), то и вторая имеет оптимальное решение y(x), причем $Z_{max} = Z(x) = L(y) = L_{min}$. Если одна из задач неразрешима из-за неограниченности целевой функции, то область допустимых значений второй задачи пустая.

Условия $(Ax)_i <= b_i$, $y_i >= 0$, i =1,…,m называются парой двойственных условий из (1),(2). Аналогично $x_j >= 0, (A^T y)_j \ge c_j$, j =1,…,n также являются парой двойственных условий.

Любое из условий называется свободным, если оно выполняется как строгое неравенство хотя бы для одного оптимального вектора. Условие называется закрепленным, если оно выполняется как равенство для всех оптимальных векторов.

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ:

Если задача (1) (значит, и (2)) разрешима, то в каждой паре двойственных условий одно является свободным, другое закрепленным.

Теоремы двойственности позволяют по оптимальному решению одной из задач установить оптимальное решение другой.

ПРИМЕР: К задаче ЛП из (а) построить двойственную и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

$$Z = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 + 4x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ c = (-1,2), b = (8,4,-2),

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача ЛП*

$$L = 8y_1 + 4y_2 - 2y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 4y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -1 \\ 2y_1 + 4y_2 - y_3 \ge 2 \\ y_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

Сопоставим пары двойственных ограничений при оптимальном решении

$$\bar{x}_1 = \frac{4}{9}, \ \bar{x}_2 = \frac{10}{9}.$$

$Z = -\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = \frac{16}{9}$	$L = 8y_1 + 4y_2 - 2y_3$
$4\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = 4 < 8$	$y_1 \ge 0$
$-\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 = 4$	$y_2 \ge 0$
$2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 2$	$y_3 \ge 0$
$\bar{x}_1 = \frac{4}{9} > 0$	$4y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -1$
$\bar{x}_2 = \frac{10}{9} > 0$	$2y_1 + 4y_2 - y_3 \ge 2$

По второй теореме двойственности пяти ограничениям слева справа соответствуют

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ 4y_1 - y_2 - 2y_3 = -1 \\ 2y_1 + 4y_2 - y_3 = 2 \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 + 2y_3 = 1 \\ 4y_2 - y_3 = 2 \end{cases}$$

$$\bar{y}_1 = 0, \quad \bar{y}_2 = \frac{5}{9}, \quad \bar{y}_3 = \frac{2}{9}, \quad L_{\min} = \frac{16}{9} = Z_{\max}$$

ЗАДАЧИ. Решить графически.

1.
$$Z = -x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

2.
$$Z = x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

3.
$$Z = -2x_1 - x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 - 4x_2 \leq 2 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

4. Привести примеры таких значений параметров p, q, при которых задача:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + px_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \geq q \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

а) имеет пустое допустимое множество;
б) имеет значение $Z_{\max} = \infty$;
в) имеет единственное решение;
г) имеет бесконечно много решений.

5. Найти все значения параметра k, при которых точка x = (-3;4) является решением задачи:

$$Z = kx_1 + (2-k)x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 7 \\ x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$$

6. Решить задачу, используя графическое решение двойственной к ней задачи.

$$L = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

7. Условие аналогично задаче 6.

$$L = 2x_1 + 4x_2 + 23x_3 + 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \le -2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2 \\ x_{1,2,3,4} \ge 0 \end{cases}$$

8. Условие аналогично задаче 6.

$$L = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le -2 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 \ge 1 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

3. СИМПЛЕКС-МЕТОД

а) Симплекс-метод.

Приведем задачу ЛП к каноническому виду, добавив искусственные переменные, уравняв систему ограничений:

$\tilde{A}\tilde{x} = b$, где

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + \quad \ldots \quad + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \qquad \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \quad \ldots \quad + a_{mn}x_n + x_{m+n} = b_m \end{cases}$$

$0 \le x_{n+1}, \ldots, x_{m+n}$ – искусственные переменные.

Целевую функцию Z = cx перепишем в виде

$Z + c'_1x_1 + \ldots + c'_nx_n = 0$, где $c'_i = -c_i$.

Сопоставим задаче в каноническом виде таблицу чисел (симплекс – таблицу)

	b	x_{n+1} . . . x_{n+m}	x_1 . . . x_n
x_{n+1}	b_1	1 … 0	a_{11} . . . a_{1n}
. . .	. . .	…	. . .
x_{n+m}	b_m	0 … 1	a_{m1} . . . a_{mn}
Z	0	0 … 0	c'_1 . . . c'_n

$x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ составляют первоначальный базис,
$x_1, \ldots, x_n$ – свободные переменные.

Полагая свободные переменные равными нулю, получим решение системы (*), что соответствует одной из крайних точек расширенной области допустимых значений.

Симплекс-метод заключается в оптимальном переборе крайних точек области допустимых значений благодаря удалению всякий раз одной из базисных переменных и введению в базис одной из свободных переменных.

ТЕОРЕМА (о симплекс-методе)

После очередной итерации возможны случаи:

1) Для любого j = 1, . . .,m, $b_j \geq 0$ и для любого i = 1, . . .,n, $c'_i \geq 0$. Найдено оптимальное решение.

2) Для любого j, $b_j \geq 0$, существует i такое, что $c'_i < 0$, в столбце с $c'_i < 0$ для любого j $a_{ji} \leq 0$. Область допустимых значений не ограничена, $Z_{max} = \infty$.

3) Для любого j, $b_j \geq 0$, существует i такое, что $c'_i < 0$, в столбце с $c'_i < 0$ существует j такое, что $a_{ji} > 0$. Переход к следующей крайней точке с помощью очередной итерации. Столбец с $c'_i < 0$ и строка с $a_{ji} > 0$ называются разрешающими.

4) Существует j такое, что $b_j < 0$, но $a_{ji} \geq 0$ для любого i в этой строке. Область допустимых значений пустая. Решений нет.

5) Существует j такое, что $b_j < 0$ и в этой строке существует $a_{ji} < 0$. Строка с $b_j < 0$ и столбец с $a_{ji} < 0$ разрешающие. Переход к следующей крайней точке.

Пересчет таблицы для случаев 3, 5 осуществляется по формулам.

а) Пересчет разрешающей строки:

$a'_{js} = \dfrac{a_{js}}{a_{ji}}$, для всех s.

б) Пересчет остальных строк:

$a'_{ks} = a_{ks} - a_{ki} a'_{js}$, для всех s, k.

Здесь a'_{js} – пересчитанные элементы,
a_{js} – элементы старой таблицы,
a_{ji} – число на пересечении разрешающих строки и столбца.

В случае 3 теоремы выбор строки осуществляется в соответствии с условием: $\min\limits_{a_{ji}>0} \dfrac{b_j}{a_{ji}}$.

По итогам пересчета переменная из разрешающей строки уходит из базиса, а переменная из разрешающего столбца приходит в базис на освободившееся место.

Пример:

$$Z = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 + 4x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

Задача в каноническом виде:

$x_3 + 4x_1 + 2x_2 = 8$

$x_4 - x_1 + 4x_2 = 4$

$x_5 - 2x_2 - x_2 = - 2$

$Z + x_1 - 2x_2 = 0$

x_3, x_4, x_5 – искусственные переменные, первоначальный базис.

Исходная симплекс-таблица:

	b	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
x_3	8	1	0	0	4	2
x_4	4	0	1	0	-1	4
x_5	- 2	0	0	1	-2	-1
Z	0	0	0	0	1	-2

5 случай из теоремы, заменяем в базисе переменную x_5 на x_1:

	b	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
x_3	4	1	0	2	0	0
x_4	5	0	1	-1/2	0	9/2
x_1	1	0	0	-1/2	1	1/2
Z	- 1	0	0	1/2	0	-5/2

3 случай из теоремы, заменяем в базисе x_4 на x_2:

	b	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
x_3	4					
x_2	10/9					
x_1	4/9					
Z	16/9	0	5/9	2/9	1	0

1 случай из теоремы, найдено оптимальное решение. Свободные переменные: $x_4 = x_5 = 0$;

базисные: $x_1 = 4/9$, $x_2 = 10/9$, $x_3 = 4$, $Z_{max} = 16/9$.

б) Задача со смешанными ограничениями.

$$Z = cx \to \max$$

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

В системе ограничений $Ax \le b$ есть как равенства, так и неравенства.

$a_{11}x_1 + \ . \ . \ . + a_{1n}x_n \le b_1$

$. \quad . \quad .$

$a_{k1}x_1 + \ . \ . \ . + a_{kn}x_n \le b_k$

$a_{k+1.1}x_1 + \ . \ . \ . + a_{k+1.n}x_n = b_{k+1}$

$. \quad . \quad .$

$a_{m1}x_1 + \ . \ . \ . + a_{mn}x_n = b_m$

Решаем методом искусственного базиса (модификация симплекс-метода).

Добавим искусственные переменные $x_{n+1}, \ . \ . \ . \ , x_{n+m}$ в соответствующие строки системы ограничений, взяв их за первоначальный базис. При этом новая целевая функция

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - M \sum_{j=n+k+1}^{n+m} x_j \ ,$$

$M > 0$ достаточно малое число.

Полученную задачу решаем симплекс-методом.

ТЕОРЕМА

Если в оптимальном решении $\bar{x}(\bar{x}_1 ... \bar{x}_{n+m})$, $\bar{x}_{n+i} = 0$, при i=k+1,...,m, то $x = (\bar{x}_1 ... \bar{x}_n)$ – оптимальное решение исходной задачи.

При решении задачи симплекс-методом следует учитывать:

1) если первоначальная задача несовместна, то оптимальное решение расширенной задачи содержит по крайней мере одно $x_{n+k+i} > 0$;

2) в первую очередь выводим из базиса переменные $x_{n+k+1}, \ . \ . \ ., x_{n+m}$, как только такая переменная ушла из базиса, убираем соответствующий ей столбец в новой симплекс-таблице.

ПРИМЕР

$$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1{,}5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

Исходная симплекс-таблица

	b	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
x_4	-1	1	0	0	-1	-1	-1
x_5	1,5	0	1	0	1	-1	2
x_6	6	0	0	1	2	3	1
Z	0	0	M	0	-1	-2	0

Пока не обращаем внимания на $b_1=-1<0$, ищем способ избавиться от x_5 в базисе. По 3 случаю теоремы о симплекс-методе разрешающий столбец – x_1, разрешающая строка – x_5.

	b	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
x_4	0,5	1	1	0	0	-2	1
x_1	1,5	0	1	0	1	-1	2
x_6	3	0	-2	1	0	5	-3
Z	1,5	0	M+1	0	0	-3	2

Переменная $x_5 = 0$, как свободная, убираем соответствующий ей столбец. В оставшейся таблице по 3 случаю теоремы выбираем разрешающий столбец x_2, разрешающую строку x_6.

После пересчета $x_1= 2{,}1$, $x_2= 0{,}6$, $x_4= 1{,}7$,
$x_3= 0$, $x_6= 0$, $Z_{max} = 3{,}3$.

ЗАДАЧИ. Решить задачи 2.1 – 2.8 симплекс-методом.

$$Z = x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 13 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_{1,2,3,4,5} \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} -2x_2 + x_4 + x_5 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 \le 5 \\ x_1 + x_2 \ge -3 \\ x_{1,2,3,4,5} \ge 0 \end{cases}$$

4. ЗАДАЧА ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

а) Задача ЦП (целочисленного программирования)

Z = cx → max

Ax <= b

x >= 0, $x_i \in Z$ – множество целых чисел, i=1,…,n.

Рассмотрим метод Гомори для решения подобных задач.

1 шаг. Исходная задача решается симплекс-методом без учета целочисленности. Получается оптимальное решение, в каноническом виде соответствующее системе:

$$(**)\begin{cases} \tilde{x}_{n+1} + \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ \ldots \\ \tilde{x}_{n+m} + \tilde{a}_{m1}\tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{a}_{mn}\tilde{x}_n = \tilde{b}_m \end{cases}$$

Отсюда, свободные переменные $\tilde{x}_1 = \ldots = \tilde{x}_n = 0$, базисные $\tilde{x}_{n+i} = \tilde{b}_i$, i=1,…,m. Если $\tilde{x}_{n+i} \in Z$ при всех i ,то задача решена. Пусть это не так.

1. шаг. Тогда существует строка в (**), в которой нарушается целочисленность:

$$\tilde{x}_{n+s} + \tilde{a}_{s1}\tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{a}_{sn}\tilde{x}_n = \tilde{b}_s \notin Z .$$

ТЕОРЕМА ГОМОРИ

(1) $\{\tilde{b}_s\} - \sum_{i=1}^{n} \{\tilde{a}_{si}\} x_i \le 0$

для любого целочисленного x из области допустимых значений,

(2) для $\tilde{x}$ неравенство из (1) нарушается.

Основываясь на теореме, записываем новое ограничение (отсечение Гомори):

$$U_1 + \{\tilde{b}_s\} - \sum_{i=1}^{n} \{\tilde{a}_{si}\} x_i = 0 .$$

Оно отсекает от области допустимых значений точку $\tilde{x}$, но не затрагивает ни одной целочисленной точки.

3 шаг. Решаем задачу с добавленным ограничением симплекс-методом.

Повторяем 2,3 шаг до получения целочисленного решения.

ПРИМЕР. На предприятии можно установить поточные линии двух типов. Стоимость линии первого типа 3 у.е., стоимость ее монтажа (-1) у.е., прибыль за единицу времени 1 у.е. Для второй линии соответственно 2,2,4 у.е. На монтаж можно потратить 2 у.е., на приобретение линий 6 у.е. Сколько и каких линий нужно установить для максимизации прибыли?

Математическая модель:

$$Z = x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_i \ge 0, \quad x_i \in Z, \quad i = 1,2 \end{cases}$$

x_i – число поточных линий типа i.

1 шаг. Исходная симплекс-таблица

	b	x_3	x_4	x_1	x_2
X_3	2	1	0	-1	2
X_4	6	0	1	3	2
Z	0	0	0	-1	-4

После двух итераций получим:

	b	x_3	x_4	x_1	x_2
X_2	3/2	3/8	1/8	0	1
X_1	1	-1/4	1/4	1	0
Z	7	5/4	3/4	0	0

$X^1(1;3/2)$ – оптимальное решение. $x_2 = 3/2 \notin Z$.

2 шаг. Строим отсечение по теореме Гомори:

$x_2+3/8x_3+1/8x_4 = 3/2$ – ограничение из таблицы.

$\{3/2\} - \{3/8\}x_3 - \{1/8\}x_4 - \{1\}x_2 <= 0$ - отсечение.

$u_1 - 3/8x_3 - 1/8x_4 = -1/2$ - добавляем новое ограничение в симплекс-таблицу.

3 шаг.

	b	x_3	x_4	x_1	x_2	u_1
X_2	3/2	3/8	1/8	0	1	0
X_1	1	-1/4	1/4	1	0	0
u_1	-1/2	-3/8	-1/8	0	0	1
Z	7	5/4	3/4	0	0	0

После решения симплекс-методом получим:

	b	x_3	x_4	x_1	x_2	u_1
X_2	1	0	0	0	1	1
X_1	4/3	0	1/3	1	0	-2/3
X_3	4/3	1	1/3	0	0	-8/3
Z	16/3	0	1/3	0	0	10/3

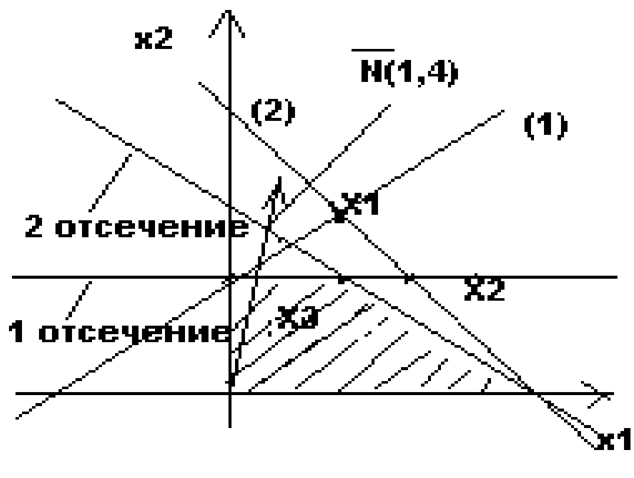
$x_1=x_3= 4/3 \notin Z$. $X^2(4/3,1)$ – оптимальное решение.

2 шаг. Строится второе отсечение:
$u_2 - 1/3x_4 - 1/3u_1 = -1/3$.
Добавляем ограничение в симплекс-таблицу.
3 шаг. После пересчета получаем:
$x_1=x_2=x_3=x_4 = 1$, $u_1=u_2= 0$, $Z = 5$.
Графическое пояснение.

$-x_1+2x_2 <= 2$ (1)

$3x_1+2x_2 <= 6$ (2)

$x_1,x_2 >= 0 \quad Z = x_1+4x_2 \to \max$



1 отсечение $3/8x_3+1/8x_4 = 1/2+u_1 >= 1/2$.

Пересчитаем это неравенство через x_1, x_2:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 & *(\frac{3}{8}) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 & *(\frac{1}{8}) \end{cases} \oplus \quad \text{получим}$$

$3/2 = x_2+3/8x_3+1/8x_4 \geq x_2+1/2$,
$x_2<= 1$ – 1 отсечение.
Аналогично, 2 отсечение имеет вид: $x_1+x_2 \leq 2$.

б) Задача Джонсона.

Для обработки n деталей имеется m станков. Каждая деталь в определенной последовательности должна пройти обработку на всех станках. t_{ik} – время обработки детали k на станке i.

Выполняются условия:

1) на одном станке одновременно обрабатывается не более одной детали;

2) всякая деталь одновременно обрабатывается не более, чем на одном станке;

3) операции обработки не прерываются.

Найти оптимальный порядок обработки деталей за минимальное время.

Математическая модель представляет собой задачу ЦП со множеством ограничений. Решение для двух, трех станков достигается обычно с помощью алгоритма Джонсона.

1. Задача для двух станков.

Каждая деталь обрабатывается сначала на первом станке, затем на втором.

Алгоритм Джонсона:

	1	2	. . .	n
1	t_{11}	t_{12}	. . .	t_{1n}
2	t_{21}	t_{22}	. . .	t_{2n}

1 шаг. Ищется минимальное t_{ij} в неупорядоченных столбцах.

2 шаг. Если min t_{ij} находится в первой строке, то ставим столбец с этим элементом на первое место среди неупорядоченных и считаем его упорядоченным.

Если min t_{ij} находится во второй строке, то ставим соответствующий столбец на последнее место среди неупорядоченных и считаем его упорядоченным.

Повторяем 1,2 шаг, пока все столбцы не будут упорядочены.

ПРИМЕР:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	4	2	0	5	5	9	6
2	3	8	0	2	8	0	6	6

Ищем минимальные элементы, упорядочиваем столбцы (номера со штрихом)

	4′	1	2	5	7	8	3′	6′
1	0	5	4	5	9	6	2	5
2	2	3	8	8	6	6	0	0

	4′ 2′ 5 7 8 1′ 3′ 6′
1	0 4 5 9 6 5 2 5
2	2 8 8 6 6 3 0 0

Оптимальная последовательность обработки:

	4′ 2′ 5′ 8′ 7′ 1′ 3′ 6′
1	0 4 5 6 9 5 2 5
2	2 8 8 6 6 3 0 0

Строится график Ганта

.

Общее время обработки – 36 единиц времени. Первый станок работает без простоев, у второго простой со 2 до 4 единиц времени (пунктир на графике).

2. Задача Джонсона для трех станков.

	1 … n
1	t_{11} … t_{1n}
2	t_{21} … t_{2n}
3	t_{31} … t_{3n}

Задача сводится к двум станкам, если выполнено хотя бы одно из условий:
$t_{2i} \le t_{1i}$, $i=1,\dots,n$
$t_{2i} \le t_{3i}$, $i=1,\dots,n$

В этом случае составляется вспомогательная таблица

	1	…	n
1′	t'_{11}	…	t'_{1n}
2′	t'_{21}	…	t'_{2n}

$t'_{1i}=t_{1i}+t_{2i}$, $t'_{2i}=t_{2i}+t_{3i}$, $i=1,\dots,n$.

Алгоритм Джонсона дает оптимальную последовательность обработки деталей. Затем для этой последовательности строится график Ганта с тремя станками.

Задачи. Решить задачи ЦП

1. $Z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 36 \\ x_1 \le 13 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

$x_{1,2} \in Z$

2. В цехе площадью 74 м^2 необходимо установить станки, на приобретение которых отпущено 42 у.е. Имеется два типа станков. Станок первого типа стоит 6 у.е., требует 12 м^2 производственных площадей, обеспечивает изготовление 70 изделий в смену. Аналогичные характеристики станка второго типа составляют соответственно 4 у.е., 6 м^2, 40 изделий в смену. Найти вариант приобретения станков, обеспечивающий максимальное производство изделий в смену.

3. $Z = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$x_i \in Z$, $i=1,\dots,4$

4. $Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10 \\ 2x_1 + 4x_3 \ge 14 \\ 2x_2 + x_3 \ge 7 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$x_i \in Z$, $i=1, 2, 3$.

5. В цехе размещены 100 станков 1 типа и 200 станков 2 типа, на каждом из которых можно производить детали А, Б.

Деталь	Производительность дет./сут.		Стоимость 1 детали, у.е.	Минимальный суточный план
	тип 1	тип 2		
А	20	15	6	1510
Б	35	30	4	4500

Найти количество x_{ij} станков типа i, i=1,2, которое необходимо выделить для производства деталей j, j=А, Б, с таким расчетом, чтобы стоимость производимой в сутки продукции была максимальной.

6. Решить задачу Джонсона

	1	2	3	4	5	6
1	4	5	2	8	1	4
2	5	9	3	2	6	5

7. Решить задачу Джонсона

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	4	12	10	25	5	9	16	20	8
2	9	6	8	5	4	12	15	3	9	10
3	13	8	10	7	8	20	16	6	10	12

5. ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ И РАСКРОЕ

а) Задача о назначении.

Постановка и математическая модель в п.1(г).

Рассмотрим венгерский метод решения задачи.

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & \ldots & n \\
\hline
1 & c_{11} & \ldots & c_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
n & c_{n1} & \ldots & c_{nn} \\
\hline
\end{array}$$

1 шаг. Приведение по строкам и столбцам. В строке i ищется минимальный элемент q_i и из всех элементов этой строки вычитается q_i, i=1,…,n. Затем то же самое повторяется по всем столбцам.

2 шаг. Поиск оптимального решения.

В приведенной таблице ищется строка или столбец, где стоит ровно один ноль. Отмечаем его. Все остальные нули той строки и того столбца, где стоит отмеченный, вычеркиваем.

Повторяем так до тех пор, пока есть что отмечать.

Если в строках и столбцах по меньшей мере два неотмеченных нуля, то дублируем таблицу и отмечаем в каждой из них свой ноль в выбранной строке или столбце.

Если число отмеченных нулей равно порядку таблицы, то найдено оптимальное решение. В противном случае переходим дальше.

3 шаг. Поиск минимального числа строк и столбцов, содержащих нули.

(1) Выделим строки, где нет отмеченных нулей.

(2) В выделенных строках ищем вычеркнутые нули и выделяем столбцы, в которых они находятся.

(3) В выделенных столбцах ищем отмеченные нули и выделяем те строки, где они стоят.

Повторяем (2), (3), пока выделяются новые строки или столбцы.

4 шаг. Перестановка нулей.

Из полученной таблицы вычеркиваем невыделенные строки и выделенные столбцы. Среди оставшихся элементов таблицы выбираем минимальный (λ). Добавляем λ в вычеркнутых строках и вычитаем λ в невычеркнутых столбцах. Переходим на шаг 2.

ПРИМЕР

1 шаг. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 8 \\ 7 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} q_1 = 2 \\ q_2 = 3 \\ q_3 = 2 \\ q_4 = 1 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ – таблица приведена по строкам

q_5=2 q_6=3

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ – приведенная таблица

$q = \sum_i q_i = 13$ – разность между целевыми функциями исходной задачи и соответствующей приведенной таблице.

2 шаг. $\begin{pmatrix} 0^* & 2 & 2 & 2 \\ \emptyset & 0^* & 2 & \emptyset \\ 2 & 3 & 0^* & 3 \\ 6 & 2 & \emptyset & 2 \end{pmatrix}$ 3 шаг. $\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 2 & 2 \\ \emptyset & 0^* & 2 & \emptyset \\ 2 & 3 & 0^* & 3 \\ 6 & 2 & \emptyset & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \vee \\ \vee \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & & \vee & \end{array} & \end{array}$

4 шаг. $\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} +\lambda \\ +\lambda \\ \vee \\ \vee \end{array} \\ \begin{array}{cccc} -\lambda & -\lambda & \vee & -\lambda \end{array} & \end{array}$ λ=2, q=13-2λ+3λ=15

2 шаг. $\begin{pmatrix} 0^* & 2 & 4 & 2 \\ \emptyset & 0 & 4 & 0 \\ \emptyset & 1 & 0^* & 1 \\ 4 & 0 & \emptyset & 0 \end{pmatrix}$

Дублируем таблицу

$$\begin{pmatrix} 0^* & 2 & 4 & 2 \\ \emptyset & 0^* & 4 & \emptyset \\ \emptyset & 1 & 0^* & 1 \\ 4 & \emptyset & \emptyset & 0^* \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 4 & 2 \\ \emptyset & \emptyset & 4 & 0^* \\ \emptyset & 1 & 0^* & 1 \\ 4 & 0^* & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

Найдено два оптимальных назначения, по месту расположения 0^*.

1 - 1	1 - 1
2 - 2	2 - 4
3 - 3	3 - 3
4 - 4	4 - 2

Минимальное значение целевой функции L=q=15.

б) Вариант максимизации целевой функции в задаче о назначении.
c_{ij} – производительность претендента i на j рабочем месте.

При этом целевая функция: $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max$. Сведем к задаче из п.(а).

В таблице ищется максимальный элемент М. Рассматривается вспомогательная таблица.

$$\begin{pmatrix} M & \dots & M \\ & \dots & \\ M & \dots & M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ & \dots & \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \tilde{c}$$

Для таблицы $\tilde{c}$ находим оптимальное назначение венгерским методом и переходим к исходной задаче.

в) Случай прямоугольной таблицы (число претендентов не равно числу видов работ).

Составляется вспомогательная таблица $\tilde{c}$, дополненная нулями до квадратной. В оптимальном назначении нулям будут соответствовать претенденты, оставшиеся без работы, или соответственно невостребованные виды работ.

г) Задача о раскрое.

Постановка и математическая модель в п.1(д). В общем случае задача решается, как задача ЦП. Рассмотрим частный случай, допускающий эвристический подход.

ПРИМЕР. Имеется а 5-метровых досок. Требуются доски длиной 1,5 м, 2,4 м, 3,2 м в отношении 5:3:2. Как следует распилить 5-метровые доски, чтобы получить максимальное число комплектов?

	Способы распила			
	1	2	3	4
1,5	3	1	1	-
2,4	-	1	-	2
3,2	-	-	1	-

x – число комплектов.

x_i – число 5-метровых досок, распиленных способом i=1,2,3,4.

Математическая модель: $Z = x \to \max$

$x_1+x_2+x_3+x_4=a$

$3x_1+x_2+x_3=5x$

$x_2+2x_4=3x$

$x_3=2x$

$x_i, x \geq 0$.

Избавимся от переменной x.

$$Z = \frac{x_3}{2} \to \max$$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$

$3x_1 + x_2 - 3/2x_3 = 0$

$x_2 + 2x_4 - 3/2x_3 = 0$

При решении задачи симплекс-методом к четырем переменным добавятся три искусственные, образующие первоначальный базис. В оптимальном решении будут четыре свободные переменные и три базисные. Значит, из первых четырех переменных, по крайней мере, одна будет свободной, то есть равняется нулю.

(1) $x_1 = 0$ (2) $x_2 = 0$ (3) $x_3 = 0$ (4) $x_4=0$

$x_2 = \frac{3}{5}a$	$x_1 = \frac{2}{9}a$	$x_1=x_2=x_4=0$	$x_1=0$
$x_3 = \frac{2}{5}a$	$x_3 = \frac{4}{9}a$	$Z=0$	$x_2 = \frac{3}{5}a$
$x_4 = 0$	$x_4 = \frac{1}{3}a$		$x_3 = \frac{2}{5}a$
$Z = \frac{1}{5}a$	$Z = \frac{2}{9}a$		$Z = \frac{1}{5}a$

$Z_{\max} = \frac{2}{9}a$ во (2) случае.

При этом $x_1 = \frac{2}{9}a$, $x_2=0$, $x_3 = \frac{4}{9}a$, $x_4 = \frac{1}{3}a$.

Получим $x = \frac{2}{9}a$ комплектов,

$3x_1 + x_2 + x_3 = \frac{10}{9}a$ досок длиной 1,5 м,

$x_2 + 2x_4 = \frac{2}{3}a$ досок длиной 2,4 м,

$x_3 = \frac{4}{9}a$ досок длиной 3,2 м.

ЗАДАЧИ

1. Задача 1.5.
2. В 1.5 добавляются два предприятия с производительностями 7, 13, 6 и 4,9,12 соответственно.
3. Решить задачу о назначении, где c_{ij} – производительность претендента i на работе j.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 15 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ 12 & 11 & 1 & 13 & 8 & 11 & 13 \\ 3 & 2 & 12 & 9 & 10 & 14 & 1 \\ 7 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 14 & 3 & 11 & 18 & 12 \\ 1 & 7 & 5 & 6 & 15 & 16 & 2 \\ 13 & 10 & 4 & 7 & 10 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 8 & 3 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 13 & 9 & 1 & 6 & 2 \\ 12 & 4 & 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 11 & 8 & 6 \\ 11 & 4 & 10 & 10 & 5 & 13 & 7 \\ 9 & 6 & 11 & 12 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

5. На участок поступило 69 металлических прутьев длиной 107 см. Их необходимо разрезать на заготовки по 13, 15, 31 см в отношении 1:4:2. Построить модель, на основе которой формулируется задача максимизации комплектов заготовок.

6. Строителям требуются комплекты досок a штук длиной 1,5 м и b штук длиной 0,6 м. Как следует распилить с четырехметровых досок, чтобы получить наибольшее количество указанных комплектов? Решить задачу при a = 4, b = 9, c = 750.

7. Решить задачу 6 при a = 3, b = 7, c = 960.

8. Решить задачу 6 при a = 2, b = 5, c = 770.

9. На участок мебельной фабрики поступило 120 листов фанеры размером 152×152 см. Необходимо разрезать их на заготовки по 105×31, 47×90, 30×51 см в отношении 3:2:5. Построить математическую модель максимизации числа комплектов.

10. На мебельной фабрике требуется раскроить 5000 листов фанеры размером 4×5м каждый, чтобы получить два вида деталей: деталь А размера 2×2м, деталь Б размера1×3м. Необходимо, чтобы деталей А оказалась не меньше, чем деталей Б. Как следует производить раскрой, чтобы получить минимальное количество (по площади) отходов?

11. Из А в Б и обратно отправляются 4 поезда согласно расписанию:

из А в Б 9^{00}, 12^{00}, 16^{00}, 20^{00};
из Б в А 10^{00}, 15^{00}, 18^{00}, 22^{00}.

Время в пути для всех поездов одинаково и равно 5 ч. Локомотивы, ведущие поезда, совершают в сутки два рейса: один из пункта, к которому локомотив прикреплен, а второй обратно с ближайшим рейсом. Найти оптимальное закрепление локомотивов за пунктами А, Б, при котором достигается минимум суммарного времени простоя локомотивов.

6. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

а) Замкнутая транспортная задача.
Постановка и математическая модель в п.1(в)

	b_1	…	b_m
a_1	c_{11}	…	c_{1m}
:		…	
a_n	c_{n1}	…	c_{nm}

Оптимальное решение ищется в два этапа.

1 этап. Определение исходного решения.

Один из наиболее эффективных – метод наименьших элементов.

Ищется $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{kp}$. Заполняется $x_{kp} = \min\{a_k, b_p\}$.

Продолжаем так до тех пор, пока все не будет поделено, на каждом шаге учитывая остатки.

Получается решение, как правило, близкое к оптимальному.

Если не на последнем шаге остатки и по строке и по столбцу равны нулю, то где-нибудь в этой строке или в этом столбце ставится ноль. Процедура эта чисто техническая, необходима для работы алгоритма на втором этапе.

ПРИМЕР

	2	9	8
12	2	6	4
3	3	2	5
4	6	5	1

Исходное решение получено методом наименьших элементов.

	2	9	8
12	2	6	4
	2	6	4
3	3	2	5
		3	
4	6	5	1
			4

Целевая функция $L = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} = 66$.

Для сравнения, решение методом северо-западного угла (начинаем с заполнением левой верхней клетки таблицы (x_{ij}) и двигаемся в правый нижний угол, переходя в соседнюю клетку строки или столбца в зависимости от остатков).

	2	9	8
12	2	6	4
	2	9	1
3	3	2	5
			3
4	6	5	1
			4

L=81

2 этап. Определение оптимального решения.

Рассмотрим метод потенциалов.

ТЕОРЕМА (об оптимальном решении замкнутой транспортной задачи).

Если $\bar{x} = (\bar{x}_{ij})$ – оптимальное решение, то ему соответствует система из n+m чисел U_i, V_j таких, что

$U_i + V_j + c_{ij} = 0$ при $\bar{x}_{ij} > 0$

$U_i + V_j + c_{ij} \geq 0$ при $\bar{x}_{ij} = 0$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$.

Числа $U_1,\ldots,U_n$, $V_1,\ldots,V_m$ называются потенциалами соответственно поставщиков и потребителей. Считаются они по формуле из теоремы $U_i + V_j + c_{ij} = 0$, для заполненных клеток с номерами (i,j), i – строка, j – столбец. $U_1=0$, иначе система несовместная.

1 шаг. Считаем потенциалы при $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,m$. Составляется оценочная матрица. $A=(a_{ij})$, где $a_{ij}=U_i+V_j+c_{ij}$.

Если решение оптимальное, то $a_{ij}\geq 0$, при всех i, j. В противном случае пытаемся улучшить решение.

2 шаг. Строим цикл для клетки, где $a_{ij}<0$ (если их несколько, то для наибольшего по модулю a_{ij}).

Циклом называется последовательность клеток, удовлетворяющая условиям:

(1) во всякой строке таблицы четное число клеток цикла;
(2) во всяком столбце таблицы четное число клеток цикла;
(3) только одна клетка цикла пустая, остальные заполненные $x_{ij}\geq 0$.

Клетки цикла нумеруются, начиная от той, для которой строится цикл. Обозначим через λ минимальное x_{ij} в четных клетках цикла. Вычитаем λ в четных и добавляем λ в нечетных клетках цикла.

После чего переписываем таблицу с новым решением и переход на 1 шаг.

ПРИМЕР. Улучшим исходное решение, полученное методом северо-западного угла, до оптимального.

	2	9	8	
12	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	
	2	9	1	$U_1=0$
3	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	
			3	$U_2=-1$
4	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$	
			4	$U_3=3$
	$V_1=-2$	$V_2=-6$	$V_3=-4$	

Оценочная матрица $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ngeq 0$.

Строим цикл для клетки (2,2) с a_{22} = -5<0.

$(1,2)^4$ - $(1,3)^3$ λ=min{3,9}=3.

$(2,2)^1$ - $(2,3)^2$

Новое решение

	2	9	8	
12	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	
	2	6	4	$U_1=0$
3	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	
		3		$U_2=4$
4	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$	
			4	$U_3=3$
	$V_1= -2$	$V_2= -6$	$V_3= -4$	

Оценочная матрица

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Найдено оптимальное решение, L_{min}=66.

б) Открытая транспортная задача.

Основное условие $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq \sum_{j=1}^{m} b_j$, спрос не равен предложению.

Записываем вспомогательную замкнутую транспортную задачу, добавляя фиктивного (n+1) поставщика с объемом поставок: $a_{n+1}=\sum_{j=1}^{m} b_j-\sum_{i=1}^{n} a_i$ или фиктивного (m+1) потребителя с объемом потребностей $b_{m+1}=\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{j=1}^{m} b_j$. В соответствующей добавленной строке (или столбце) полагаем $c_{ij}=0$. Решаем полученную замкнутую задачу. В оптимальном решении убираем фиктивную строку (столбец).

ПРИМЕР. Решить транспортную задачу.

	25	20	15
50	3	2	7
30	4	1	3
20	5	2	4

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 100 > 60 = \sum_{j=1}^{3} b_j .$$

Добавляется фиктивный потребитель с $b_4 = 40$. Решается замкнутая задача

	25	20	15	40
50	3	2	7	0
30	4	1	3	0
20	5	2	4	0

Оптимальное решение

	25	20	15	40
50	25			25
30		20	10	
20			5	15

Следовательно, оптимальное решение открытой задачи

	25	20	15
50	3 25		
30		1 20	3 10
20			4 5

L_{min}=145.

в) Метод блокирования клеток.

В условиях открытой транспортной задачи имеется дополнительное ограничение: один или несколько из поставщиков (или потребителей) должны быть полностью обслужены.

В этом случае на пересечении фиктивной строки (столбца) и льготного потребителя (поставщика) ставятся затраты на перевозку c_{ij}=M – очень большое положительное число, блокируя их сотрудничество.

ПРИМЕР

	25	20	15
50	3	2	7
30	4	1	3
20	5	2	4

Третий поставщик должен полностью реализовать свой товар.
Составляется замкнутая задача.

	25	20	15	40
50	3	2	7	0
30	4	1	3	0
20	5	2	4	M

Методом потенциалов получается оптимальное решение.

	25	20	15	40
50	25			25
30		15		15
20		5	15	

Оптимальное решение исходной задачи

	25	20	15
50	3 25		
30		1 15	
20		2 5	4 15

L_{min}=160.

г) Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность

	b_1 … b_m
a_1	c_{11} … c_{1m}
:	…
a_n	c_{n1} … c_{nm}

Дополнительные ограничения: $x_{ij} \le d_{ij}$, от поставщика i (i=1,…,n) к покупателю j (j=1,…,m) нельзя перевести более d_{ij} единиц товара. Таким образом, задана матрица.

$$D = (d_{ij}) = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ & \dots & \\ d_{n1} & \dots & d_{nm} \end{pmatrix}$$

Условия разрешимости задачи:

$\sum_{j=1}^{m} d_{ij} \ge a_i$, i=1,…,n;

$\sum_{i=1}^{n} d_{ij} \ge b_j$, j=1,…,m.

На первом этапе исходное решение ищется, например, методом наименьшего элемента с учетом дополнительных ограничений. Если на этом этапе

$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$, для всех i,j, то исходное решение найдено. В противном случае добавляется фиктивный поставщик с $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m}\left(b_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)$, фиктивный потребитель с $b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right)$.

При этом полагаем $c_{n+1\ m+1} = 0$, $c_{n+1\ j} = c_{i\ m+1} = M > 0$, i =1,…,n, j =1,…,m.

M – очень большое число.

Оптимальное решение ищется методом потенциалов. Если клетки, заблокированные числом M, не освобождаются, то решения нет.

Для оптимального решения:

$U_i + V_j + c_{ij} \ge 0$ при $x_{ij} = 0$,

$U_i + V_j + c_{ij} \le 0$ при $x_{ij} = d_{ij}$

$U_i + V_j + c_{ij} = 0$ при $0 < x_{ij} < d_{ij}$

ПРИМЕР

	70	30	50
45	5	2	3
65	7	9	6
40	4	7	5

$$D = \begin{pmatrix} 30 & 25 & 25 \\ 40 & 15 & 20 \\ 25 & 20 & 15 \end{pmatrix}$$

Исходное решение найдем методом наименьшего элемента, учитывая ограничения $x_{ij} \le d_{ij}$.

	70	30	50
45	5	2	3
		25	$\underline{20}$
65	7	9	6
	40	$\underline{5}$	$\underline{15}$
40	4	7	5
	25		$\underline{15}$

Подчеркнуты те x_{ij}, которые получены независимо от дополнительного ограничения $x_{ij} \le d_{ij}$. Так как $\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 65 < b = 70$, то требуется добавить фиктивного поставщика, а значит, и потребителя. Получаем исходное решение.

	70	30	50	5
45	5	2	3	M
		25	$\underline{20}$	
65	7	9	6	M
	40	$\underline{5}$	$\underline{15}$	$\underline{5}$
40	4	7	5	M
	25		$\underline{15}$	
5	M	M	M	0
	$\underline{5}$			$\underline{0}$

Решаем методом потенциалов, учитывая дополнительное ограничение. Потенциалы считаются по формулам $U_i + V_j + c_{ij} = 0$ только для клеток с подчеркнутыми x_{ij}.

Оптимальное решение:

5 5	2 25	3 15
7 40	9 5	6 20
4 25	7 	5 15

L_{min}=740.

ЗАДАЧИ:

1. Решить задачу

	10	35	20
40	7	2	4
25	3	8	9

2.

	40	35	30	45
36	4	3	2	7
34	1	1	6	4
40	3	5	9	4

3. Решить задачу 2 при условии, что первый потребитель должен получить товар полностью.

	14	11	17	15	14
18	9	21	22	14	10
12	30	34	42	23	26
22	8	17	30	27	9
19	11	20	24	7	25

4.

	34	39	24	8	8
41	12	15	9	19	22
33	20	15	11	2	19
25	21	26	23	7	16
14	11	24	8	3	29

5. Транспортная задача с ограничениями на пропускные способности.

	28	70	15	13	42
74	6	12	5	3	11
33	13	16	9	7	12
19	17	1	16	15	5
42	20	19	18	7	18

$$D = \begin{pmatrix} 16 & 32 & 5 & 9 & 14 \\ 13 & 17 & 2 & 4 & 12 \\ 17 & 15 & 2 & 4 & 4 \\ 14 & 8 & 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$$

6.

	71	20	50	23	27
54	4	2	9	16	5
73	4	10	18	15	3
13	14	11	18	12	2
51	15	7	17	13	20

$$D = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 13 & 10 & 12 \\ 25 & 12 & 15 & 10 & 13 \\ 10 & 5 & 5 & 5 & 4 \\ 27 & 5 & 17 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Решить задачу 1.3.

8. Известен выпуск продукции на трех заводах: $a_1=46$, $a_2=34$, $a_3=30$; требования на эту продукцию четырех потребителей: $b_1=35$, $b_2=20$, $b_3=45$, $b_4=10$; затраты на производство единицы продукции: $d_1=9$, $d_2=8$, $d_3=2$. Матрица C транспортных расходов на доставку единицы продукции от завода i к потребителю j:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$ Определить оптимальный план закрепления потребителей к заводам из условия минимизации суммарных затрат на производство и транспортировку.

9. Решить задачу 9 из условия минимизации только транспортных расходов.

7. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

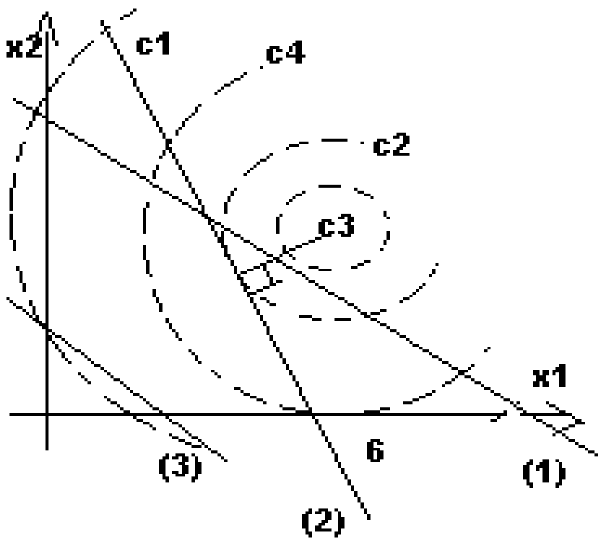
а) Графическое решение

$Z = Z(x_1,...,x_n) \rightarrow$экстремум, при условии $g_i(x_1,...,x_n) \le 0$, i = 1,…,m.

Строится область допустимых значений, соответствующая системе ограничений. Целевая функция строится в виде линий уровня Z=c, при различных значениях константы С. Остается найти c_1 и c_2, при которых достигаются наибольшее и наименьшее значения Z.

ПРИМЕР: $Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to$ экстр.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 & (1) \\ 3x_1 + x_2 \le 15 & (2) \\ x_1 + x_2 \ge 1 & (3) \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$



Линии уровня $Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 = c$ представляют собой совокупность окружностей с центрами в точке (6,2) и радиусом $\sqrt{c}$. Наиболее удалена от центра точка (0,4) области допустимых значений. Значит, $Z_{\max} = Z(0,4) = 40$.

Наименее удалена точка на границе (2) ограничения, в которой линия уровня (окружность) касается этой границы.

$x_2 - 2 = k(x_1 - 6)$ – прямые, проходящие через точку (6,2). Подберем k из условия перпендикулярности с границей (2) ограничения.

$3x_1 + x_2 = 15$

$x_2 = -3x_1 + 15$

$k = -\dfrac{1}{k_1} = \dfrac{1}{3}$. Искомая прямая $x_2 - 2 = \dfrac{1}{3}(x_1 - 6)$.

$\begin{cases} 3x_2 = x_1 \\ 3x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$, отсюда находим

$\bar{x}_1 = 4{,}5;\quad \bar{x}_2 = 1{,}5;\quad Z_{\min} = Z(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 2{,}5$.

б) Метод множителей Лагранжа.

$Z = f(x_1,...,x_n) \to$экстремум, при условии $g_i(x_1,...,x_n) = 0$, i=1,…,m.

Составляется функция Лагранжа

$$F(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) = f(x_1,...,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1,...,x_n)$$

Необходимое условие экстремума предполагает существование непрерывных производных функций f, g_i, i=1,…,m.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0 \end{cases}, \text{ i=1,…,n; j=1,…,m.}$$

Из системы ищется множество критических точек функции F. Для определения характера экстремума можно подсчитать $f(\bar{x})$ в критических точках.

ПРИМЕР. $Z = x_1 x_3 + x_1 x_2 \to$экстр.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Функция Лагранжа

$F = x_1x_3+x_1x_2+\lambda_1(x_1+x_2 - 4)+\lambda_2(x_1+x_3 - 2)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial X_i} = 0, \quad i = 1,2,3 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1,2 \end{cases}$$

Система уравнений дает:

$\overline{x_1} = 1,5$, $\overline{x_2} = 2,5$, $\overline{x_3} = 0,5$,

$Z(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}) = 4,5$.

Возьмем точку, удовлетворяющую ограничениям, соседнюю с $\bar{x}$.

$x_1 = \overline{x_1} + \varepsilon = 1,5+ \varepsilon$.

Тогда, $x_2 = 4 - x_1 = 2,5 - \varepsilon$,

$x_3 = 2 - x_1 = 0,5 - \varepsilon$.

$Z(x_1,x_2,x_3) = 4,5 - 2\varepsilon^2 < 4,5 = Z(\bar{x})$.

Следовательно, $\bar{x}$-точка максимума, $Z_{max} = 4,5$.

ЗАДАЧИ

1. $Z = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 20x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

2. Решить задачу методами Лагранжа, исключения переменных.
$Z = xy^3 \rightarrow \max$,
при условии $8x + 3y = 11$.

3. Найти точки экстремумов функции
$Z = x + 7y$,
при условии $x^2 + y^2 = 16$.

4. Найти точки экстремумов функции
$Z = 3x^2 + 2xy + 6y^2$,
при условии $4x^2 + 7y^2 = 9$.

5. В области решений системы неравенств
$(x - 2)(y + 1) \leq 16$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,
определить экстремумы функции $Z = (x - 4)^2+(y - 3)^2$.

6. В области решений системы неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 5x + 3y \leq 24 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

определить глобальные экстремумы функции
$Z = |x - 5| + y$.

7. В области из задачи 6 определить глобальные экстремумы функции
$Z = (x - 3)^2 + 4(y - 6)^2$.
8. Используя метод Лагранжа, решить задачу:
$Z = x_1 - 2x_2+2x_3 \rightarrow$ экстр.,
при условии $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 9$.
Задачи нелинейного программирования, приводящиеся к линейным.

а) Задача квадратичного программирования.
Найти экстремум целевой функции

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + 2\sum_{i \neq j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} d_{ii} x_i^2 ,$$

при условиях: $Ax=b$,
$x \geq 0$.
Выражение $x'Dx = 2\sum_{i \neq j} d_{ij} x_i x_j + \sum_{i} d_{ii} x_i^2$
является квадратичной формой.
$cx = \sum_{i} c_i x_i$ – линейное выражение, на направление выпуклости функции Z не влияет.

Если $x'Dx$ отрицательно определена, то Z выпукла вверх; положительно определена, тогда выпукла вниз.

ТЕОРЕМА: Если все главные миноры квадратичной формы $D_i \neq 0$, то ее можно привести к виду $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, где $\lambda_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}$, i>1, $\lambda_1 = D_1$.

Система ограничений Ax = b задает выпуклое множество. По теореме определяется направление выпуклости целевой функции. Известно, что всякий максимум выпуклой вверх функции на выпуклом множестве является глобальным. Аналогично, всякий минимум выпуклой вниз функции на выпуклом множестве является глобальным.

Для задачи с Z → max составляется функция Лагранжа L(x,λ) и записываются условия оптимальности Куна-Таккера:

$\partial L/\partial x_j |_{\bar{x}, \bar{\lambda}} \leq 0,$ $\quad \overline{x_j} \;\; \partial L/\partial x_j |_{\bar{x}, \bar{\lambda}} = 0,$

$\partial L/\partial \lambda_i |_{\bar{x}, \bar{\lambda}} \geq 0,$ $\quad \overline{\lambda_i} \;\; \partial L/\partial \lambda_i |_{\bar{x}, \bar{\lambda}} = 0,$

i = 1,…, m; j = 1,…, n.

Для задачи квадратичного программирования

$L(x,\lambda) = c'x + x'Dx + \lambda'(b - Ax),$

x- вектор-столбец, x'- вектор-строка.

Из условий Куна-Таккера обозначим:

$$V = -\frac{\partial L}{\partial x} = A'\lambda - c' - 2Dx \geq 0.$$

Преобразованная система ограничений:

$$\begin{cases} c' + 2Dx - A'\lambda + v = 0 \\ xv = 0 \\ Ax = b \end{cases}$$

(из условия $\overline{x_j} \;\; \partial L/\partial x_j |_{\bar{x}, \bar{\lambda}} = 0$)

$x, \upsilon \geq 0.$

Ищется максимум вспомогательной целевой функции

$Z' = -\sum_i U_i$,

где U_i – дополнительные переменные, вводятся для решения задачи симплекс-методом, входят в первоначальный базис. При этом одновременно x_i и υ_i в базисе находиться не могут (второе уравнение в системе ограничений), i = 1,…, n.

ПРИМЕР. $Z = 10x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, i = 1,2,3,4.

$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $D_1 = -1 = \lambda_1$, $D_2 = 1$, то есть $\lambda_2 = \frac{D_2}{D_1} = -1.$

$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, следовательно, квадратичная форма $-x_1^2+2x_1x_2 - 2x_2^2$ отрицательно определенная. Функция Z выпуклая вверх, любой ее максимум является глобальным.

Функция Лагранжа

$L(x,\lambda) = 10x_1 - x_1^2+2x_1x_2 - 2x_2^2+\lambda_1(10 - x_1 - 2x_2 - x_3)+\lambda_2(6 - x_1 - x_2 - x_4)$.

$\partial L/\partial x_i + \upsilon_i = 0$, отсюда

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 + v_1 = -10 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + v_2 = 0 \\ -\lambda_1 + v_3 = 0 \\ -\lambda_2 + v_4 = 0. \end{cases}$$

$Ax = b$, отсюда

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6. \end{cases}$$

Получается шесть уравнений. Избавимся от λ_1, λ_2 с помощью 3, 4 уравнений. Добавим искусственные переменные U_1, U_2 так, чтобы правые части первых двух уравнений остались неотрицательными.

$U_1+2x_1 - 2x_2 - \upsilon_1 + \upsilon_3 + \upsilon_4 = 10$

$U_2+2x_1 - 4x_2 + \upsilon_2 - 2\upsilon_3 - \upsilon_4 = 0$

$x_3 + x_1+ 2x_2 = 10$

$x_4 + x_1+ x_2 = 6$

$Z' = -U_1 - U_2 = -10+4x_1 - 6x_2 - \upsilon_1 + \upsilon_2 - \upsilon_3$.

Решаем задачу симплекс-методом при условии: x_i, υ_i одновременно не могут входить в базис, $i = 1,\ldots,4$.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	v_3	v_4	u_1	u_2
x_3	10	1	2	1	-	-	-	-	-	-	-
x_4	6	1	1	-	1	-	-	-	-	-	-
u_1	10	2	-2	-	-	-1	-	1	1	1	-
u_2	-	2	-4	-	-	-	1	-2	-1	-	1
z'	-10	-4	6	-	-	1	-1	1	-	-	-

Разрешающий столбец x_1, разрешающая строка u_2.

	b	x	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	v_3	v_4	u_1
x_3	10	-	4	1	-	-	-1/2	1	1/2	-
x_4	6	-	3	-	1	-	-1/2	1	1/2	-
u_1	10	-	2	-	-	-1	-1	3	2	1
x_1	-	1	-2	-	-	-	1/2	-1	-1/2	-
z'	-10	-	-2	-	-	1	1	-3	-2	-

Столбец со свободной переменной u_2 отбрасывается (п. 3(б), задача со смешанными ограничениями). Разрешающий столбец x_2, разрешающая строка x_4.

На следующей итерации разрешающий столбец v_4, разрешающая строка u_1. Получим оптимальное решение:

x_1=4,6; x_2=1,4; x_3 =2,6; v_4=3,6; z'=0; $z_{max}=10x_1-x_1^2+2x_1x_2-2x_2^2$=33,8.

б) Задача дробно-линейного программирования.

Максимизировать функцию:

$$Z=\frac{\sum_{i=1}^{n}c_i x_i + c_0}{\sum_{i=1}^{n}d_i x_i + d_0},$$

при условии $\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i \le b_j$, $x_i \ge 0$; j=1,…,m; i=1,…,n.

В области допустимых значений $D=\sum_{i=1}^{n}d_i x_i + d_0 \ne 0$, иначе возможно $Z_{\max}=\infty$.

Если D<0, то домножим числитель и знаменатель функции Z на (-1).

Переходим к вспомогательным переменным

$y_0=\frac{1}{D}>0$, $y_i = y_0 x_i \ge 0$, i=1,…,n.

Перепишем задачу в новых переменных:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}c_i y_i + c_0 y_0 \longrightarrow \max$$

$\sum_{i=1}^{n}a_{ji}y_i - b_j y_0 \le 0$, при j=1,…,m

$\sum_{i=1}^{n}d_i y_i + d_0 y_0 = 1$, – дополнительное ограничение.

$y_i \ge 0$, при i=0,…,n.

Решаем задачу ЛП. $\bar{y}$ – оптимальное решение, $\bar{x}_i = \frac{1}{y_0}\bar{y}_i$.

Если $\bar{y}_0 = 0$, то область неограничена, $Z_{\max} = \infty$.
ПРИМЕР. $Z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max$

$x_1 - 2x_2 \le 2$
$2x_1 + x_2 \le 6$
$x_1,\ x_2 \ge 0$

В новых переменных
$y_i = y_0 x_i$, где $y_0 = \dfrac{1}{x_1 + 2x_2 + 1}$, имеем:
$Z = 2y_1 - y_2 \to \max$

$y_1 - 2y_2 - 2y_0 \le 0$
$2y_1 + y_2 - 6y_0 \le 0$
$y_1 + 2y_2 + y_0 = 1$

Первоначальная симплекс – таблица:

	b	y_3	y_4	y_5	y_0	y_1	y_2
y_3	0	1	0	0	-2	1	-2
y_4	0	0	1	0	-6	2	1
y_5	1	0	0	1	1	1	2
Z	0	0	0	0	0	-2	1

После двух итераций: $y_0=1/3$, $y_1=2/3$, $y_4=2/3$, $y_2=y_3=y_5=0$.
$Z_{max}=4/3$.
В исходных переменных: $x_1=2$, $x_2=0$, $Z_{max}=4/3$.

ЗАДАЧИ

1. $Z = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + 13x_2 \le 51 \\ 15x_1 + 7x_2 \le 107 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $Z = -(x_1^2 + x_2^2) + 10x_1 + 20x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 \le 72 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. $Z = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

4. Максимизировать в многоугольнике с вершинами (0,0), (0,4), (5,8), (10,4), (6,0) функцию $Z = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 + 6x_2$.

5. В условиях задачи 4 минимизировать функцию $Z = -x_1 x_2$.

6. $$Z = \frac{x_1 - x_2 - x_3}{2x_2 + x_3 + 1} \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_{1,2,3} \geq 0 \end{cases}$$

7. $$Z = \frac{-x_1 + x_2 + 3}{3x_1 + 2x_2 + 1} \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

8. $$Z = \frac{x_1 - 2x_2 + 3}{x_2 + 2} \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

Методы безусловной оптимизации.

а) Метод градиентного спуска.

Найти минимум выпуклой вниз функции f(x), при $x \in R^n$.

Обозначим через $f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ градиент функции в точке x. Как известно, в направлении градиента функция наиболее быстро возрастает, а в направлении антиградиента ($-f'(x)$) убывает.

$x^{(0)}$ – начальное приближение точки минимума.

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k f'(x^{(k)})$

Достаточно малое α_k подбирается из условия: $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$.

Окончание счета при

$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^k) \right| \leq \varepsilon$, i=1,…,n.

В ответе берется $\bar{x} = x^{(k)}$, $f_{\min} = f(x^{(k)})$.

б) Метод наискорейшего спуска.
Отличается от предыдущего метода подбором α_k.
$\Phi(\alpha_k) = \min\limits_{\alpha>0} \Phi(\alpha) = \min\limits_{\alpha>0} f(x^{(k)} - \alpha f'(x^k)).$

в) Метод сопряженных направлений.
$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k P^{(k)}$, где
$\alpha_k = \arg\min\limits_{\alpha>0} f(x^{(k)} - \alpha P^{(k)})$, $P^{(0)} = f'(x^{(0)})$,
$P^{(k)} = f'(x^{(k)}) + \beta_k P^{(k-1)}$, k=1,2,…

$$\beta_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(k)})\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{k-1})\right]^2}.$$

Пример. Минимизировать функцию

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2.$$

Начальное приближение $x^{(0)}=(0,0)$.

$P^{(0)} = f'(x^{(0)}) = (-7,-7).$
$\Phi(\alpha) = 98(2\alpha^2 - \alpha)$.
$\Phi'(\alpha) = 0$, отсюда $\alpha_0 = \frac{1}{4}$.
$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha_0 P^{(0)} = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$,
$f'(x^{(1)}) = \left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$, отсюда $\beta_1 = \frac{1}{16}$,
$P^{(1)} = f'(x^{(1)}) + \beta_1 P^{(0)} = \left(-\frac{35}{16}, \frac{21}{16}\right)$,
$\Phi(\alpha) = \frac{49}{32}\left(\frac{7}{2}\alpha^2 - 4\alpha - 392\right)$.
$\Phi'(\alpha) = 0$, отсюда $\alpha_1=4/7$.
$x^{(2)}=x^{(1)}-\alpha_1 P^{(1)}=(3,1)$
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(2)}) = 0$, i=1,2.

Найдено оптимальное решение
$x_1=3$, $x_2=1$, $f_{min}=-14$.

г) Метод Ньютона.

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[f''(x^{(k)})\right]^{-1} f'(x^{(k)})$, где

$\left[f''(x^{(k)})\right]$ – матрица вторых производных в точке $x^{(k)}$.

д) Модифицированный метод Ньютона.

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \left[f''(x^{(k)})\right]^{-1} f'(x^{(n)})$

α_k – ищется из условия

$\min\limits_{\alpha>0} f\left(x^{(k)} - \alpha\left[f''(x^{(k)})\right]^{-1} f'(x^{(k)})\right)$.

Задачи. Решить примеры методами б, в, заканчивая вычисления при ε=0,01.

1. $Z = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to \min$
2. $Z = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2 \to \min$
3. $Z = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 + x_2 - x_3 \to \min$
4. $Z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \to \min$
5. $Z = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2\sin\frac{x_1 - x_2}{2} + x_2 \to \min$

Ответы:

2.1. $x=(1,-1)$, $Z=-1$
2.2. $x=(2/3,2/9)$, $Z=-8/3$
2.3. нет решения
2.6. $L_{min}=9$
2.7. $L_{min}=46/3$
2.8. Неразрешима
3.9. $\bar{x}=(1/2, 0, 6, 3/2, 0)$, $Z=-6,5$
3.10. $\bar{x}=(0, 2, 4, 1, 0)$, $Z=-2$

4.1. $x=(13,3)$, $Z=16$
4.2. $x=(3,6)$.
4.3. $x=(3, 2, 2, 1)$, $Z=2$
4.4. $x=(1, 2, 3)$, $Z=10$
4.5. $x_{11}=76$, $x_{12}=24$, $x_{21}=0$, $x_{22}=200$.

5.1. 1-1, 2-3, 3-2.
5.2. 1-1, 2-3, 4-2.
5.3. $L=92$
5.4. $L=75$
5.10. $L_{min}=2000$ м^2
5.11. $t_{min}=8$ ч.

6.1. $L_{min}=255$
6.2. $L=302$
6.4. $L=1121$
6.5. $L=1460$
6.6. $L=1903$
6.7. $L=1864$

7.1. $Z=-108,44$

7.5. $Z_{min}=0$, $Z_{max}\to\infty$
7.6. $Z_{max}=13$
7.7. $Z_{max}=3,48$
7.8. $(1, -2, 2)$, $(-1, 2, -2)$

8.1. $Z=-131$
8.2. $Z=80$
8.3. $Z=1$
8.4. $Z=13$
8.5. $Z=-45$
8.6. $Z=-8/29$

8.7. Z=3
8.8. нет решений.

9.1. Z=1/3
9.2. Z=-0,75
9.3. Z=-0,4146
9.4. Z=-0,707
9.5. Z=-0,45

Список литературы

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Лань. 2011. 352 стр.
2. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
3. Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1976.
4. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. М.: Высшая школа. 1975.
5. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука. 1986.
6. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И., Слукин Н.М. и другие. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование. Лань. 2010. 448 стр.
7. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4. Методы оптимизации / Под ред. А.В. Ефимова. М.: Наука. 1990.

Дудник Владимир Григорьевич

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебное пособие для студентов направления 230100
«Информатика и вычислительная техника»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано в печать 20.02.13. Формат 60x84 /16.
Усл. печ. л. 3,06. Тираж 50 экз. Заказ 13 1151. Рег. №5.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.